Orthonormalbasen

Alle Basen sind gleich.

Aber manche Basen sind ~~gleicher~~ orthonormal

$\boxed{(V, \langle\cdot,\cdot\rangle) \text{ euklidisch oder unitär}}$

10.20 Def.:

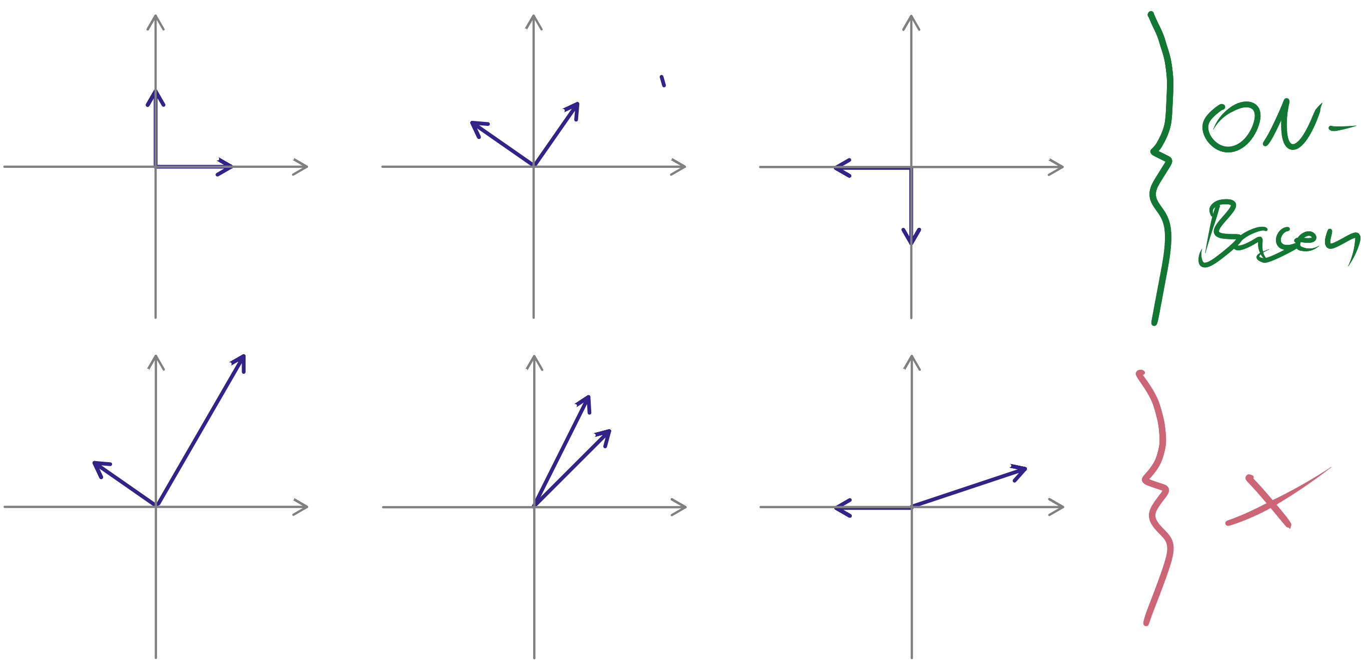
$\underline{v} \in V$ normiert, falls $\|\underline{v}\| = 1$

$\underline{v}, \underline{w} \in V$ zueinander orthogonal, falls $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0$;

Schreibweise: $\underline{v} \perp \underline{w}$

Orthonormalbasis (ON-Basis): Basis $(\underline{b}_i)_i$ von V, für die gilt: jedes $\underline{b}_i$ normiert, und jeweils $\underline{b}_i \perp \underline{b}_j$ für $i \neq j$.

Bsp: ($\mathbb{R}^2$, Standardskalarprodukt)



10.21 Satz: Jeder endlich-dim. euklidische oder unitäre VR besitzt eine ON-Basis.

Konstruktiver Beweis:
Wende auf beliebige Basis $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ das folgende Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren an.

Ersetze induktiv $\underline{b}_1$ durch $\underline{d}_1$,
$\underline{b}_2$ durch $\underline{d}_2$,
$\vdots$

derart, dass jeweils $(\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_k, \underline{b}_{k+1}, \dots, \underline{b}_n)$ Basis von V ist, und
$\|\underline{d}_i\| = 1 \quad \forall i$,
$\underline{d}_i \perp \underline{d}_j \quad \forall i,j$ mit $i \neq j$

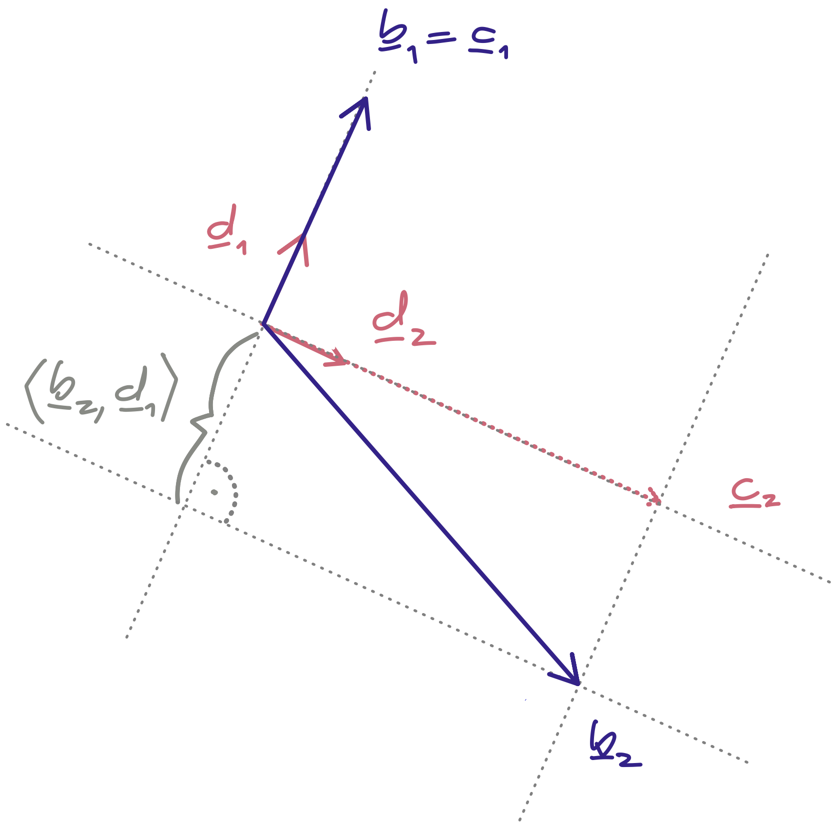
IA/SCHRITT 1: $\underline{d}_1 := \dfrac{\underline{b}_1}{\|\underline{b}_1\|}$

normierte Version von $\underline{b}_1$

IS/SCHRITT k: Seien $\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_{k-1}$ bereits konstruiert.
Definiere
$$\underline{c}_k := \underline{b}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \underline{b}_k, \underline{d}_i \rangle \underline{d}_i .$$
$$\underline{d}_k := \frac{\underline{c}_k}{\|\underline{c}_k\|}$$

normierte Version von $\underline{c}_k$

Dann ist $(\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_{k-1}, \overset{\underline{d}_k}{\cancel{\underline{b}_k}}, \underline{b}_{k+1}, \dots, \underline{b}_n)$ wieder Basis von V nach Steinitzschem Austauschlemma (5.11) (denn Koeffizient von $\underline{b}_k$ in $\underline{d}_k$ ist $\neq 0$).



Prüfe noch:

- $\underline{c}_k \neq \underline{0}$ (denn $\underline{b}_k$ l.u. von $\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_{k-1}$), also $\underline{d}_k$ wohldefiniert
- $\| \underline{d}_k \| = 1$ ✓
- $\langle \underline{d}_k, \underline{d}_j \rangle = 0$ für $j = 1, \dots, k-1$.

  R.z.z.:

  $\langle \underline{c}_k, \underline{d}_j \rangle = 0$ für $j = 1, \dots, k-1$.

  Das folgt aus kurzer Rechnung:

$$
\begin{aligned}
\langle \underline{c}_k, \underline{d}_j \rangle &= \left\langle \underline{b}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \underline{b}_k, \underline{d}_i \rangle \underline{d}_i, \underline{d}_j \right\rangle \\
&= \langle \underline{b}_k, \underline{d}_j \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \underline{b}_k, \underline{d}_i \rangle \cdot \underbrace{\langle \underline{d}_i, \underline{d}_j \rangle}_{\substack{0 \text{ für } i \neq j \\ 1 \text{ für } i = j}} \\
&= \langle \underline{b}_k, \underline{d}_j \rangle - \langle \underline{b}_k, \underline{d}_j \rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\square$

10.22 Korollar:

„Es gibt nur das Standardskalarprodukt":

Jedes Skalarprodukt auf einem endlich-dim. $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-VR wird in einer geeigneten Basis durch die Einheitsmatrix dargestellt. $\square$

Orthogonale Komplemente

$\boxed{(V, \langle \cdot , \cdot \rangle) \text{ euklidisch oder unitär}}$

10.23 Def.: Das orthogonale Komplement eines Untervektorraums $W \leq V$ ist

$$W^\perp := \{ \underline{v} \in V \mid \underline{v} \perp \underline{w} \quad \forall \underline{w} \in W \}$$

10.24 Korollar:
Für jeden UVR W eines endlich-dimensionalen euklidischen oder unitären VRs $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ gilt:

$$\underbrace{V = W \oplus W^\perp}_{\text{siehe Def. 4.21}}$$

Beweis:
Wähle ON-Basis $(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k)$ von W und ergänze zu Basis $(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k, \underline{w}_{k+1}, \dots, \underline{w}_n)$ von V.
Wende hierauf Gram-Schmidt-ON-Verfahren aus dem Beweis von Satz 10.21 an. Wir erhalten eine ON-Basis

$$(\underbrace{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k}_{\in W}, \underbrace{\underline{w}'_{k+1}, \dots, \underline{w}'_n}_{\in W^\perp}) \text{ von } V$$

mit

Daraus folgt die Behauptung
$(W \cap W^\perp = \{0\}$ und $W + W^\perp = V)$. $\square$

Hessesche Normalform einer affine Hyperebene

Erinnerung: Ein affiner Unterraum eines VR V ist eine Teilmenge der Form

$$\underline{u}_0 + U = \{ v \in V \mid \underline{v} - \underline{u}_0 \in U \}$$

für einen UVR $U \leq V$.

Im Fall $\dim U = \dim V - 1$ nennen wir diese Teilmenge affine Hyperebene.

z.B.: Gerade $\subseteq \mathbb{R}^2$, Ebene $\subseteq \mathbb{R}^3$

10.25 Satz: Jede affine Hyperebene in einem euklidischen oder unitären VR hat die Form

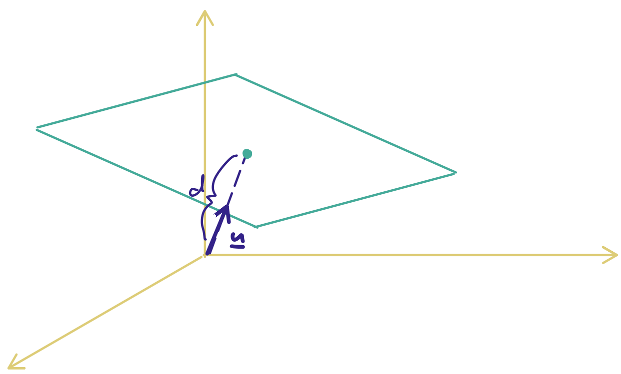
$$H = \{ \underline{v} \in V \mid \langle \underline{v}, \underline{n} \rangle = d \}$$

für einen normierten Vektor $\underline{n}$ und ein $d \in \mathbb{R}$, $d \geq 0$.

Umgekehrt ist obige Menge H für jeden normierten Vektor $\underline{n}$ und jedes $d \in \mathbb{R}$ eine affine Hyperebene.

Im Fall $d > 0$ ist $\underline{n}$ eindeutig bestimmt.
Im Fall $d = 0$ ist $\underline{n}$ bis auf ein Vorzeichen eindeutig.

10.26 Terminologie: $\underline{n}$ Normalenvektor von H
d Abstand von H vom Ursprung.



Beweis zu 10.25:

Sind $\underline{n}$ & d vorgegeben, so ist

$$U := \{\underline{v} \in V \mid \langle \underline{v}, \underline{n}\rangle = 0\}$$
$$= \ker\left(\begin{array}{rcl} V & \xrightarrow{\varphi} & K \\ \underline{v} & \mapsto & \langle \underline{v}, \underline{n}\rangle \end{array}\right) \qquad (K = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C})$$

ein UVR, da φ linear ist. Wegen $\varphi(\underline{n}) = \langle \underline{n}, \underline{n}\rangle = 1$ ist $\dim(\operatorname{im}\varphi) = 1$, also nach Rangformel

$$\dim U = \dim V - 1$$

Da φ surjektiv, können wir ferner $\underline{u}_0 \in V$ mit $\varphi(\underline{u}_0) = d$ wählen. Also ist

$$\{\underline{v} \in V \mid \langle \underline{v}, \underline{n}\rangle = d\} = \{\underline{v} \in V \mid \langle \underline{v} - \underline{u}_0, \underline{n}\rangle = 0\}$$
$$= \{\underline{v} \in V \mid \underline{v} - \underline{u}_0 \in U\}$$

eine affine Hyperebene.

//

Ist umgekehrt $H = \{\underline{v} \in V \mid \underline{v} - \underline{u}_0 \in U\}$ eine affine Hyperebene, so ist nach Korollar 10.24

$$V = U \oplus U^\perp$$

und $U^\perp$ 1-dimensional. Ist $(\underline{n})$ Orthonormalbasis von $U^\perp$, so ist

$$U = \{\underline{v} \in V \mid \langle \underline{v}, \underline{n}\rangle = 0\},$$

und

$$H = \{\underline{v} \in V \mid \langle \underline{v} - \underline{u}_0, \underline{n}\rangle = 0\}$$
$$= \{\underline{v} \in V \mid \langle \underline{v}, \underline{n}\rangle = \langle \underline{u}_0, \underline{n}\rangle\}$$
$$= \{\underline{v} \in V \mid \langle \underline{v}, \underline{n}\rangle = d\}$$

für $d := \langle \underline{u}_0, \underline{n}\rangle$. Einziges verbleibendes Problem:

eventuell $d \in \mathbb{R}$, aber $d < 0$.

Oder sogar $d \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Wähle daher zunächst beliebige ON-Basis $(\tilde{\underline{n}})$ von $U^\perp$;

$$\tilde{d} := \langle \underline{u}_0, \tilde{\underline{n}}\rangle \in \mathbb{C}$$

Falls $\tilde{d}=0$, wähle $\underline{n}=\underline{\tilde{n}}$. ✓

Falls $\tilde{d}\neq 0$, $\exists z\in\mathbb{C}$: $|z|=1$ und $\bar{z}\cdot\tilde{d}\in\mathbb{R}_{\geq 0}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$.

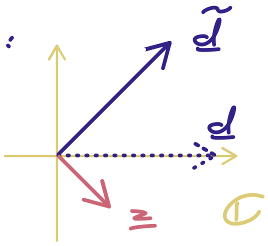
(nämlich $z:=\dfrac{\tilde{d}}{|\tilde{d}|}$: $\bar{z}\cdot\tilde{d}=\dfrac{\bar{\tilde{d}}\cdot\tilde{d}}{|\tilde{d}|}=\dfrac{|\tilde{d}|^2}{|\tilde{d}|}=|\tilde{d}|$)

Wähle $\underline{n}=z\cdot\underline{\tilde{n}}$.

Dann ist $d:=\langle \underline{y}_0,\underline{n}\rangle=\bar{z}\cdot\tilde{d}\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ ✓

(Bsp: $d=-3$
$z=-1$

Bsp:



)

$\square$

Ergänzung: Kreuzprodukt

Für eine Fläche H durch den Ursprung $\underline{0}$ in $\mathbb{R}^3$ lässt sich ein Normalenvektor ganz leicht berechnen.

10.27 Def: Das Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist die Verknüpfung

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\times} \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

(Merkformel: entwickel

$$\text{"} \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & x_1 & y_1 \\ \underline{e}_2 & x_2 & y_2 \\ \underline{e}_3 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \text{"}$$

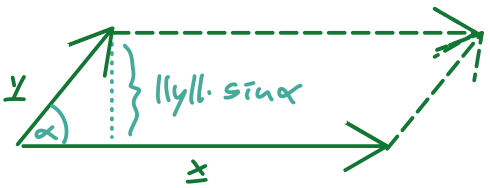
nach der ersten Spalte.

10.28 Satz: Für $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

① $(\underline{x} \times \underline{y}) \perp \underline{x}$ und $(\underline{x} \times \underline{y}) \perp \underline{y}$

② $\|\underline{x} \times \underline{y}\| = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \cdot \sin \sphericalangle(\underline{x}, \underline{y})$

(= Flächeninhalt des von $\underline{x}$ & $\underline{y}$ aufgespannten Parallelogramms)



(vgl. 10.19: $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \cdot \cos \sphericalangle(\underline{x}, \underline{y})$)

Beweis: Rechnung [....]. Zur zweiten Zeile zeige zunächst

$$\|\underline{x} \times \underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 \cdot \|\underline{y}\|^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{x}\| \|\underline{y}\|}\right)^2\right)$$

und benutze dann Def.

$$\sphericalangle(\underline{v}, \underline{w}) := \arccos\left(\frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}{\|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\|}\right)$$ aus 10.19

und $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. □

Beispiel:

$$H = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

affine Ebene

Um Hessesche Normalform von H zu finden, berechnen wir

$$\underline{\tilde{n}} := \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$$

$$\underline{n} := \frac{\underline{\tilde{n}}}{\|\underline{\tilde{n}}\|} = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$$

$$d = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \underline{n} \right\rangle = \frac{14}{\sqrt{21}}$$

Also $H = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \underline{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} = \frac{14}{\sqrt{21}} \right\}$